

## SANTVARŲ AUKŠČIO OPTIMIZAVIMAS

Tomas Ulitinas<sup>1</sup>, Stanislovas Kalanta<sup>2</sup>

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

El. paštas: <sup>1</sup>tomas.ulitinas@vgtu.lt; <sup>2</sup>kal@vgtu.lt

**Santrauka.** Nagrinėjamas santvarų aukščio ir jų elementų skerspjūvių optimizavimo uždavinys. Elementų skerspjūviai projektuojami iš plieninių profiliuotųjų atsižvelgiant į stiprumo, pastovumo ir standumo reikalavimus. Uždavinio matematinis modelis formuluojamas kaip netiesinis matematinio programavimo uždavinys. Jis sprendžiamas iteraciniu būdu, taikant matematinį kompiuterinį paketą MATLAB ir jo paprogramį *fmincon*. Kiekvienoje iteracijoje koreguojamas gniuždomų elementų klupumo koeficientas. Optimizavimo rezultatai lyginami su tokio pat aukščio santvarų projektavimo kompiuterinio paketo *Robot Millenium* rezultatais.

**Reikšminiai žodžiai:** baigtiniai elementai, optimalus projektavimas, plieninės konstrukcijos.

## Įvadas

Siekiant mažinti medžiagų sąnaudas reikia projektuoti konstrukcijas taikant optimizavimo metodus (Čyras 1983; Farkas 1984; Rao 1996; Ravindran *et al.* 2006; Kalanta 2007; Xor *et al.* 1983). Optimalių ir saugių konstrukcijų projektavimas yra aktuali problema. Naujų idėjų, kompiuterinių technologijų, matematikos bei fizikos mokslų ir eksperimentinių tyrimų sintezė atveria naujas galimybes konstrukcijų optimizavimo srityje.

Pastaruoju metu netiesiniams konstrukcijų optimizavimo uždaviniams spręsti yra sukurti įvairūs specifiniai algoritmai: genetiniai (Hayalioglu 2000; Zheng *et al.* 2006), evoliuciniai (Manickarajah *et al.* 2000; Weise 2009), etapiniai (Karkauskas 2007), diskrečiojo optimizavimo (Appa *et al.* 2006; Gutkowski *et al.* 1997), homogeniniai (Yuge *et al.* 1999) ir kiti. Tačiau netiesinių optimizavimo uždavinių sprendimo algoritmai yra sudėtingi ir, be to, nėra standartinių universalių kompiuterinių programinių paketų tokiems uždaviniams spręsti. Todėl netiesiniai optimizavimo uždaviniai dažnai sprendžiami priartėjimo būdu, kiekvienoje iteracijoje sprendžiant tiesinio programavimo uždavinius (Kalanta 2007; Kardokas *et al.* 2006). Projektuojant konstrukcijas, kuriose galimos plastinės deformacijos, gaunama papildoma medžiagų ekonomija, lyginant su analogiškais tampriais konstrukcijomis. Tačiau tamprųjų ir plastinių konstrukcijų optimizavimo uždaviniai (Karkauskas 2007; Hayalioglu 2000; Grigusevičius *et al.* 2005), kuriuose įvertinami ne tik stiprumo, bet ir standumo bei stabilumo reikalavimai, yra sudėtingi netiesinio programavimo uždaviniai ir jų realizacija nelengva.

Šiame darbe nagrinėjami tamprųjų plieninių santvarų optimizavimo uždaviniai, siekiant minimizuoti jų tūrį (masę) optimizuojant ne tik strypų skerspjūvius, bet ir santvaros aukštį ir struktūrą. Jie formuluojami kaip netiesiniai diskrečiojo optimizavimo uždaviniai (Kalanta *et al.* 2009). Matematiniai modeliai sudaromi taikant baigtinių elementų metodą. Atsižvelgiama į stiprumo, standumo ir stabilumo reikalavimus, suformuluotus nacionaliniame statybos techniniame reglamente (*STR 2.05.08:2005* 2005). Strypų skerspjūviai projektuojami iš karštai valcuotųjų plieninių profiliuotųjų.

## Konstrukcijos tūrio (svorio) minimizavimo uždavinio matematinis modelis

Paprastai konstrukcijos projektuojamos numatant kelių nepalankiausių apkrovos derinių  $v = 1, 2, \dots, p$  poveikį. Šiuo atveju pusiausvyros, geometrinės lygtis, stiprumo ir stabilumo sąlygas turi tenkinti visus apkrovų derinius atitinkančios įrašos ir poslinkiai. Taigi, veikiant keliems apkrovimo deriniams matematinį modelį galima būtų aprašyti taip (Kalanta 2007):

$$\text{rasti } \min \mathbf{L}^T \mathbf{A}_0, \quad (1)$$

kai

$$\begin{aligned} [A] \mathbf{N}_v &= \mathbf{F}_v, \quad [D] \mathbf{N}_v - [A]^T \mathbf{u}_v = \mathbf{0}, \\ [\Phi] \mathbf{N}_v - [G] \mathbf{A}_0 &\leq \mathbf{0}, \quad [E] \mathbf{u}_v \leq \mathbf{u}_{rib}, \\ \mathbf{A}_0 &\geq \bar{\mathbf{A}}_0 \in D, \quad v = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (2)$$

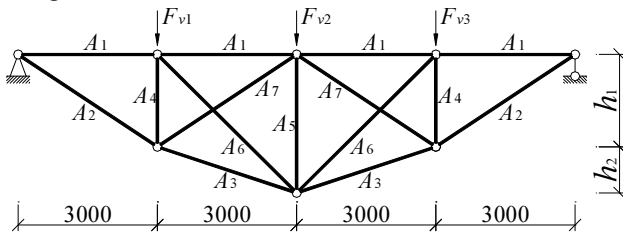
čia  $\mathbf{L}$  – elementų ilgių vektorius;  $\mathbf{A}_0$  – optimizuojamų skerspjūvio plotų vektorius;  $[A]$  – pusiausvyros lygčių

koeficientų matrica;  $\mathbf{F}_v, \mathbf{N}_v, \mathbf{u}_v$  –  $v$ -ąjį derinį atitinkantys išorinių jėgų, įrašų ir poslinkių vektoriai;  $[D]$  – pasiduo-damumo matrica;  $[\Phi]$  – stiprumo ir pastovumo sąlygų matrica;  $\bar{\mathbf{A}}_0$  – minimalių skerspjūvio plotų vektorius.

Šį matematinį modelį sudaro: lygybės – pusiausvyros ir geometrinės lygtys; pirmoji nelygybė – stiprumo ir stabilumo sąlygos; kitos nelygybės – poslinkių ir konstruktyviniai apribojimai. Kadangi optimizuojamas ir santvaros aukštis, tai nežinomieji yra ne tik įrašos, poslinkiai, strypų skerspjūvių plotai, bet ir santvaros aukščiai  $h_1, h_2$  (1 pav.). Todėl pusiausvyros ir geometrinės lygtys yra netiesinės, o matematinis modelis – netiesinis matematinio programavimo uždavinys.

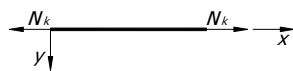
### Pagrindinės priklausomybės

Nagrinėjama tampri santvara, kurios skaičiuojamoji schema parodyta 1 pav. Jos diskretinis modelis sudaromas skirstant į baigtinius elementus  $k = 1, 2, \dots, r$ , sujungtus mazguose.



1 pav. Santvaros skaičiuojamoji schema  
Fig. 1. A computational scheme of truss

Tempiamame ar gniuždomame baigtiniame elemente fiksuojami du mazgai. Priimama prielaida, kad elemento skerspjūvio plotas ir kiti rodikliai yra pastovūs. Kandangi santvaros strypų įrašos  $N_k = \text{const}$ , tai jos strypai modeliuojami pirmosios eilės baigtiniais elementais (2 pav.).



2 pav. Pirmosios eilės strypinis baigtinis elementas  
Fig. 2. The first rank of a finite element of the bar

Santvaros **pusiausvyros lygtys** aprašomos lygčių sistema:

$$[A]\mathbf{N}_v = \mathbf{F}_v, \quad v = 1, 2, \dots, p. \quad (3)$$

Ją sudaro mazgų pusiausvyros lygtys:

$$\sum N_k = F_i, \quad (4)$$

čia  $F_i$  –  $i$ -ojo linijinio poslinkio kryptimi veikianti išorinė jėga.

**Geometrinės lygtys** sudaromos remiantis virtualių jėgų principu. Tarkime, kad išorinės ir vidinės jėgos įgijo statiškaai galimus prieaugius  $\delta\mathbf{F}_v$  ir  $\delta\mathbf{N}_v$ , tenkinančius statikos lygtį  $[A]\delta\mathbf{N}_v = \delta\mathbf{F}_v$ . Remiantis virtualių jėgų principu galioja tokia išorinių ir vidinių darbų lygybė:  $\delta\mathbf{F}_v^T \mathbf{u}_v = \delta\mathbf{N}_v^T \Theta_v$ . Arba, įvertinus pusiausvyros lygtį:  $\delta\mathbf{N}_v^T [A]^T \mathbf{u}_v = \delta\mathbf{N}_v^T \Theta_v$ . Iš čia gauname geometrinę lygtį

$$[A]^T \mathbf{u}_v = \Theta_v, \quad v = 1, 2, \dots, p. \quad (5)$$

čia  $\Theta_v$  –  $v$ -ąjį derinį atitinkantis elementų deformacijų vektorius. Taikant fizikines lygtis

$$\Theta_v = [D]\mathbf{N}_v, \quad v = 1, 2, \dots, p. \quad (6)$$

gaunama tokia geometrinė lygčių išraiška:

$$[D]\mathbf{N}_v - [A]^T \mathbf{u}_v = \mathbf{0}, \quad v = 1, 2, \dots, p. \quad (7)$$

Santvaros **stiprumo ir stabilumo sąlygos** aprašomos nelygybėmis (Kalanta 2007):

$$[\Phi]\mathbf{N}_v - [G]\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{0}, \quad v = 1, 2, \dots, p. \quad (8)$$

Jas sudaro visų jos elementų stiprumo sąlygos

$$|N_k| \leq R\gamma_c A_k \quad (9)$$

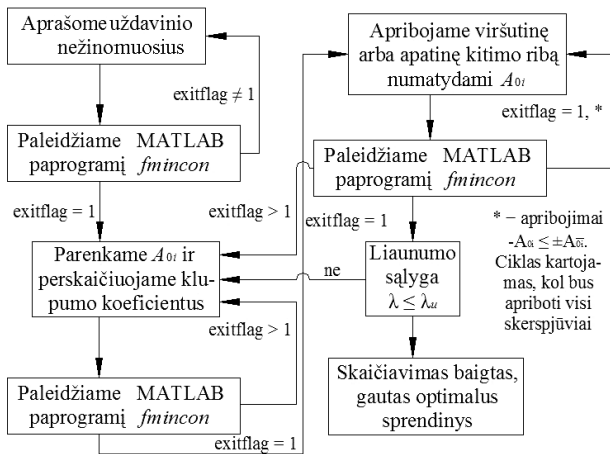
ir gniuždomų elementų pastovumo sąlygos

$$-N_k \leq \varphi_k R\gamma_c A_k, \quad (10)$$

čia  $A_k$  –  $k$ -ojo elemento skerspjūvio plotas;  $R$  – plieno skaičiuotinis stipris įvertinus patikimumo koeficientą;  $\gamma_c$  – darbų sąlygų koeficientas;  $\varphi_k$  – klupumo koeficientas. Klupumo koeficiento reikšmė priklauso nuo elemento liaunio ir nustatoma pagal statybos techninį reglamentą (STR 2005.08:2005).

### Sprendimo algoritmas

Netiesinių optimizavimo uždavinių (1–2) sprendiniai randami iteraciniu būdu, kiekvienoje iteracijoje priskyrus elementams profilius iš sortimento ir sprendžiant netiesinio programavimo uždavinį. Jo sprendiniui nustatyti pasitelkiamas matematinio modeliavimo paketas MATLAB, kurio aplinkoje aprašomi visi netiesinio programavimo uždavinio apribojimai, o sprendinys randamas kreipiantis į paprogramį *fmincon*. Kiekvienoje iteracijoje pasirinkus naujus skerspjūvius (pagal prieš tai gautuosius) apskaičiuojamos naujos juos atitinkančios klupumo koeficientų reikšmės ir sprendžiant matematinio programavimo uždavinį nustatomos reikalingų skerspjūvio plotų ir kitų nežinomųjų reikšmės. Diskretinė strypų skerspjūvių plotų, atitinkančių profilių sortimentą, reikšmė nustatoma taikant šakų rėžių metodą (Kalanta 2007). 3 pav. parodyta algoritmo schema.



3 pav. Sprendimo algoritmo schema  
Fig. 3. The scheme of solution algorithm

### Santvaros optimizavimo uždavinys

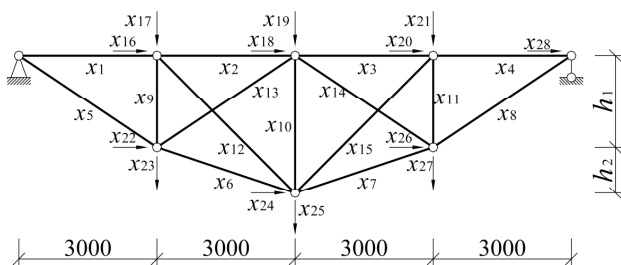
Santvara, kurios skaičiuojamoji schema pavaizduota 1 pav., veikiama dviejų derinių:

1 derinys:  $F_{1,1} = 100 \text{ kN}$ ,  $F_{1,2} = 100 \text{ kN}$ ,  
 $F_{1,3} = 100 \text{ kN}$ ;

2 derinys:  $F_{2,1} = 100 \text{ kN}$ ,  $F_{2,2} = 70 \text{ kN}$ ,  $F_{2,3} = 40 \text{ kN}$ .

Santvaros visi elementai projektuojami iš apvaliųjų karštai valcuotų profilių, kurių plieno markė S275, tampumo modulis  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ . Ribojamas viduriniojo mazgo vertikalusis poslinkis:  $x_{19} \leq 5 \text{ cm}$ .

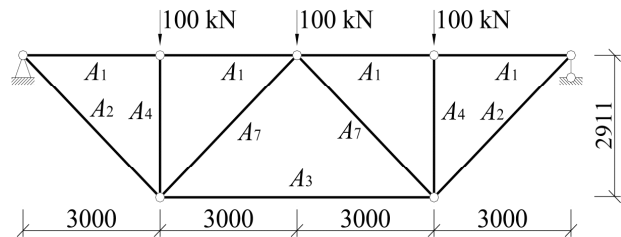
Projektuojama simetrinė santvara, jos optimizuojami parametrai  $h_1, h_2$  ir  $A_1, A_2, \dots, A_7$  parodyti 1 pav. Kiti uždavinio nežinomieji (įrašos  $x_1, x_2, \dots, x_{15}$  ir poslinkiai  $x_{16}, x_{17}, \dots, x_{28}$ ) pavaizduoti 4 pav. Reikia nustatyti optimalų santvaros aukštį, struktūrą ir optimalius stypų skerspjūvio plotus, siekiant minimizuoti plieno sąnaudas, kai santvarą veikia tik pirmasis apkrovimo derinys arba tik antrasis ir taip pat atsižvelgiant į abu derinius. Be to, atlikti skaičiavimai esant aukščio ribojimams:  $h_1 + h_2 = 2,0 \text{ m}$  ir  $h_1 + h_2 = 1,5 \text{ m}$ . Gautieji optimizavimo rezultatai buvo palyginti su programiniu paketu *Robot Millenium* gautais projektavimo rezultatais.



4 pav. Santvaros būvio nežinomieji  
Fig. 4. The unknowns of the state of truss

Skaičiuojant santvarą nuo pirmojo apkrovimo derinio buvo gautos tokios optimizuojamų parametų reikšmės:  $h_1 = 2,911 \text{ m}$ ,  $h_2 = 0$ ; skerspjūvių plotai –  $A_1 = 11,08 \text{ cm}^2$  ( $\text{Ø}101$ ),  $A_2 = A_3 = A_4 = 8,616 \text{ cm}^2$  ( $\text{Ø}88,9$ ),  $A_5 = 0$ ,  $A_6 = 0$ ,  $A_7 = 8,616 \text{ cm}^2$  ( $\text{Ø}88,9$ ). Plieno sąnaudos  $V = 37888,34 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ . Optimali struktūra parodyta 5 pav.

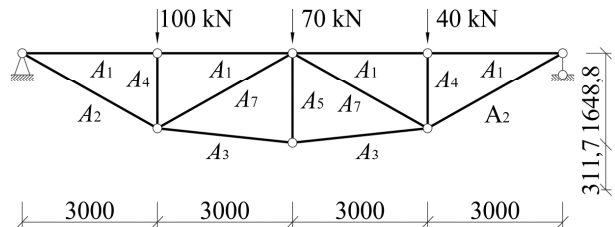
Tokios pat aukščių ir skerspjūvio plotų reikšmės gautos ir tuo atveju, kai atsižvelgiama į abiejų apkrovimo derinių poveikį.



5 pav. Optimali santvaros struktūra veikiant tik pirmajam ir atsižvelgiant į abu apkrovimo derinius

Fig. 5. Optimal truss structure considering only the first and the first and second weighting combinations

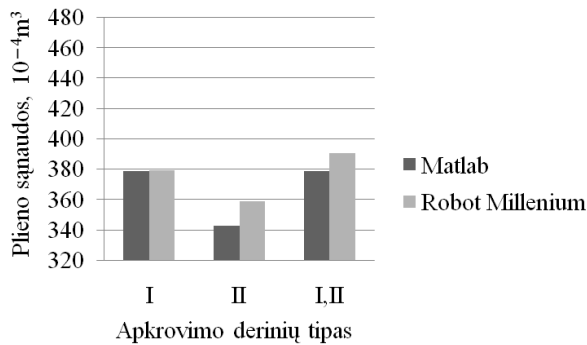
Veikiant tik antrajam deriniui gauta:  $h_1 = 1,6486 \text{ m}$ ,  $h_2 = 0,3117 \text{ m}$ ,  $h = h_1 + h_2 = 1,9604 \text{ m}$  ir skerspjūvių plotai ( $\text{cm}^2$ ) –  $A_1 = 12,52$  ( $\text{Ø}114,3$ ),  $A_2 = 10,67$  ( $\text{Ø}88,9$ ),  $A_3 = 8,616$  ( $\text{Ø}88,9$ ),  $A_4 = 5,74$  ( $\text{Ø}60,3$ ),  $A_5 = 3,733$  ( $\text{Ø}48,3$ ),  $A_6 = 0$ ,  $A_7 = 6,004$  ( $\text{Ø}76,1$ ). Plieno sąnaudos  $V = 34261,43 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ . Optimali santvaros struktūra parodyta 6 pav.



6 pav. Optimali santvaros struktūra veikiant antrajam deriniui  
Fig. 6. Optimal truss structure from considering the second weighting combination

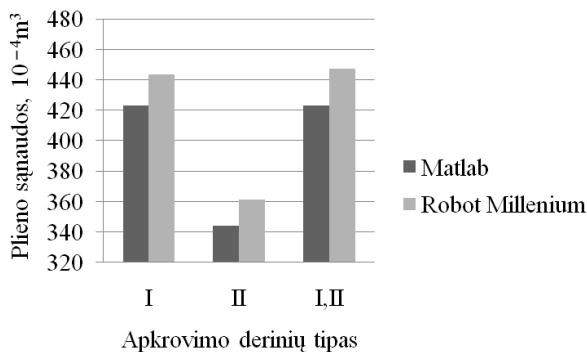
Projektuojant 2,0 m ir 1,5 m aukščio santvaras gautos analogiškos jų optimalios struktūros. Plieno sąnaudos veikiant abiem apkrovimo deriniams atitinkamai yra  $0,04122 \text{ m}^3$  ir  $0,045956 \text{ m}^3$ . Tyrimų rezultatai rodo, kad mažėjant santvaros aukščiui, plieno sąnaudos didėja.

7–9 pav. pateiktas optimizavimo rezultatų palyginimas su kompiuteriniu paketu *Robot Millenium* gautais rezultatais.



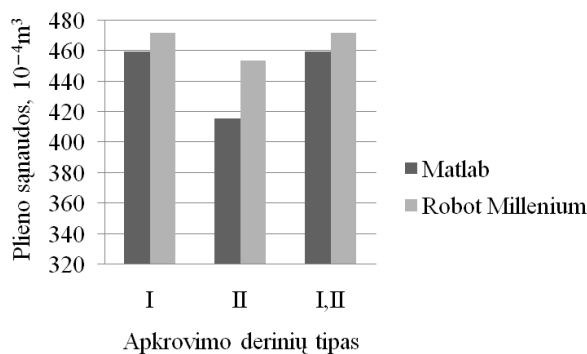
7 pav. Plieno sąnaudos, kai  $h = 2,911$  m

Fig. 7. Expenditure of steel, when  $h = 2,911$  m



8 pav. Plieno sąnaudos, kai  $h = 2,0$  m

Fig. 8. Expenditure of steel, when  $h = 2,0$  m



9 pav. Plieno sąnaudos, kai  $h = 1,50$  m

Fig. 9. Expenditure of steel, when  $h = 1,50$  m

## Išvados

1. Tamprųjų statybinių konstrukcijų projektavimo uždaviniai formuluojami ir sprendžiami kaip netiesiniai optimizavimo uždaviniai. Kadangi optimizuojamas ir santvaros aukštis, tai pusiausvyros ir geometrinės lygtys yra netiesinės. Uždavinys sprendžiamas iteraciniu būdu.

2. Nustatyti optimalūs skerspjūvio plotai, optimalus santvaros aukštis ir optimali jos struktūra veikiant keliems apkrovimo deriniams.

3. Mažinant santvaros aukštį plieno sąnaudos didėja, tačiau optimali jos struktūra nesikeičia.

4. Parodyta, kad optimali santvara yra statiškai išsprendžiamos struktūros. Jos optimalus aukštis atsižvel-

giant tik į pirmąjį arba į abu derinius –  $h_1 = 2,911$  m ir  $h_2 = 0$  m. Tokios santvaros plieno sąnaudos yra atitinkamai 17,5 % ir 10,3 % mažesnės už plieno sąnaudas, reikalingas 1,5 m ir 2,0 m aukščio optimalioms santvaroms pagaminti.

5. Sprendžiant optimizavimo uždavinį (1) ir (2) gautami ekonomiškėsi santvaros projektai lyginant su kompiuteriniu paketu *Robot Millenium* gaunamais projektais.

## Literatūra

- Appa, G.; Pitsoulis, L.; Williams, H. P. (Eds.). 2006. *Handbook modelling for discrete optimization*. New York: Springer. 442 p. ISBN-10: 0-387-32941-2 (HB).
- Čyras, A. 1983. *Analysis and optimization of elastoplastic systems*. Chichester: John Wiley & Sons. 122 p. ISBN 0-85312-629-1.
- Farkas, J. 1984. *Optimum design of metal structures*. Chichester: Ellis Horwood.
- Grigusevičius, A.; Kalanta, S. 2005. Optimization of elastic-plastic beam structures with hardening using finite element method, *Foundation of Civil and Environmental Engineering* 6: 31–52.
- Gutkowski, W. (Ed.). 1997. *Discrete Structural optimization*. Springer-Verlag. 250 p.
- Hayalioglu, M. S. 2000. Optimum design of geometrically non-linear elastic-plastic steel frames via genetic algorithm, *Computers & Structures* 77: 527–38. doi:10.1016/S0045-7949(99)00221-7
- Yuge, K.; Iwai, N.; Kikuchi, N. 1999. Optimization of 2D structures subjected to non-linear deformations using the homogenization method, *Structural Optimization* 17: 286–299. doi:10.1007/BF01207005
- Kalanta, S.; Atkočiūnas, J.; Venskus, A. 2009. Diskrete optimizavimo problemos of steel bar structures, *Engineering Structures* 31(6): 1298–1304. doi:10.1016/j.engstruct.2009.01.004
- Kalanta, S. 2007. *Taikomosios optimizacijos pagrindai*. Vilnius: Technika. 480 p. ISBN 978-9955-28-160-3. doi:10.3846/924-S
- Kardokas, D.; Kalanta, S. 2006. Tamprųjų metalinių rėmų projektavimas, iš *STATYBA: 9-osios Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijos „Lietuva be mokslo – Lietuva be ateities“; įvykusios 2006 m. kovo 29–31 d., straipsnių rinkinys*. Vilnius: Technika, 177–183.
- Karkauskas, R. 2007. Optimization of geometrically non-linear elastic-plastic structures in the state prior to plastic collapse, *Journal of Civil Engineering and Management* 13(3): 183–192.
- Manickarajah, D.; Xie, Y. M.; Steven, G. P. 2000. Optimum design of frames with multiple constraints using an evolutionary method, *Computers & Structures* 74: 731–741. doi:10.1016/S0045-7949(99)00083-8
- Rao, S. S. 1996. *Engineering optimization. Theory and Practice*. Third Edition. New York: John Wiley & Sons. 920 p. ISBN 0-471-55034-5.
- Ravindran, A.; Ragsdell, K. M.; Reklaitis, G. V. 2006. *Engineering optimization. Methods and applications*. Second edition. New Jersey: John Wiley & Sons. 667 p. ISBN 978-0-471-55814-9.
- STR 2.05.08:2005. *Plieninių konstrukcijų projektavimas. Pagrindinės nuostatos*. 2005. Vilnius. 128 p.

- Weise, T. 2009. *Global Optimization algorithms. Theory and application*. Newest version: <<http://www.it-weise.de/>>. 821 p.
- Zheng, Q. Z.; Querin, O. M.; Barton, D. C. 2006. Geometry and sizing optimisation of discrete structure using the genetic programming method, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 31(6): 452–461. doi:10.1007/s00158-005-0561-x
- Дьяконов, В. П. 2005. *MATLAB 6.5 SP1/7.0. Simulink 5/6 в математике и моделировании*. Москва: Солон-Пресс. 576 с. ISBN 5-98003-209-6.
- Хог, Э.; Арора, Я. 1983. *Прикладное оптимальное проектирование*. Москва: Мир. 480 с.

## OPTIMIZATION OF TRUSS HEIGHT

T. Ulitinas, S. Kalanta

### Abstract

The article analyzes the task in truss height and in the optimization of the cross-sections of their elements. Element cross-sections are designed of steel profiles considering requirements for strength, stability and rigidity. A mathematical model is formulated as a nonlinear mathematical programming problem. It is solved as an iterative process, using mathematical software package “MATLAB” routine “*fmincon*”. The ratio of buckling is corrected in the each iteration. Optimization results are compared with those obtained applying software package “*Robot Millennium*”.

**Keywords:** finite elements, optimal design of steel structures.